Ueber die Zahl π.*)

Von

F. Lindemann in Freiburg i. Br.

Bei der Vergeblichkeit der so ausserordentlich zahlreichen Versuche**), die Quadratur des Kreises mit Cirkel und Lineal auszuführen, hält man allgemein die Lösung der bezeichneten Aufgabe für unmöglich; es fehlte aber bisher ein Beweis dieser Unmöglichkeit; nur die Irrationalität von π und von π^2 ist festgestellt. Jede mit Cirkel und Lineal ausführbare Construction lässt sich mittelst algebraischer Einkleidung zurückführen auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen, also auch auf die Lösung einer Reihe von quadratischen Gleichungen, deren erste rationale Zahlen zu Coefficienten hat, während die Coefficienten jeder folgenden nur solche irrationale Zahlen enthalten, die durch Auflösung der vorhergehenden Gleichungen eingeführt sind. Die Schlussgleichung wird also durch wiederholtes Quadriren übergeführt werden können in eine Gleichung geraden Grades, deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Man wird sonach die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises darthun, wenn man nachweist, dass *die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann.* Den dafür nöthigen Beweis zu erbringen, ist im Folgenden versucht worden.

Die wesentliche Grundlage der Untersuchung bilden die Relationen zwischen gewissen bestimmten Integralen, welche Herr Hermite angewandt hat***), um den transcendenten Charakter der Zahl e festzustellen. In § 1 sind deshalb die betreffenden Formeln zusammengestellt; § 2 und § 3 geben die Anwendung dieser Formeln zum Beweise des erwähnten Satzes; § 4 enthält weitere Verallgemeinerungen.

---

*) Vergl. eine Mittheilung des Hrn. Weierstrass an die Berliner Akademie, vom 22. Juni 1882.

**) Man sehe die Artikel *Cyclometrie, Quadratur* und *Rectification* in Klügel's mathematischen Wörterbuche.

***) Sur la fonction exponentielle, Paris 1874 (auch Comptes rendus, t. LXXVII, 1873).

§ 1.

Die Hermite'schen Formeln.

Es sei

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n);$$

mit Z möge irgend eine der *von einander verschiedenen* Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$ bezeichnet werden; dann bestehen zwischen den bestimmten Integralen

$$\varepsilon_m^i = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_i}\, dz$$

folgende Relationen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{m+1}^0 &= \Theta(z_0, z_0)\, \varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_0)\, \varepsilon_m^1 + \cdots + \Theta(z_n, z_0)\, \varepsilon_m^n, \\ \varepsilon_{m+1}^1 &= \Theta(z_0, z_1)\, \varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_1)\, \varepsilon_m^1 + \cdots + \Theta(z_n, z_1)\, \varepsilon_m^n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{m+1}^n &= \Theta(z_0, z_n)\, \varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_n)\, \varepsilon_m^1 + \cdots + \Theta(z_n, z_n)\, \varepsilon_m^n. \end{aligned}$$

Die Function $\Theta(z, \zeta)$ ist eine ganze Function n^{ten} Grades ihrer beiden Argumente; in ihr sind die Coefficienten der Potenzen von z und ζ ganze symmetrische Functionen der $n+1$ Grössen z_i und enthalten ausserdem nur ganze Zahlen, *sodass sie selbst ganze Zahlen sind, sobald dies mit den Coefficienten der Potenzen von z in $f(z)$ der Fall ist;* sie sind ganze Functionen n^{ten} Grades von m; auf ihr Bildungsgesetz kommt es im Folgenden nicht weiter an, es muss nur noch bemerkt werden, dass ihre Determinante folgender Relation genügt:

$$\begin{vmatrix} \Theta(z_0, z_0) & \Theta(z_1, z_0) & \cdots & \Theta(z_n, z_0) \\ \Theta(z_0, z_1) & \Theta(z_1, z_1) & \cdots & \Theta(z_n, z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Theta(z_0, z_n) & \Theta(z_1, z_n) & \cdots & \Theta(z_n, z_n) \end{vmatrix} = \delta^2,$$

wenn

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \cdots & z_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_0^n & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}.$$

Durch die angegebenen Gleichungen sind die Integrale ε_{m+1}^i zurückgeführt auf die Integrale ε_m^i. Durch wiederholte Anwendung derselben findet man also Formeln von der Gestalt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^0 &= A_0\varepsilon_1^0 + A_1\varepsilon_1^1 + \cdots + A_n\varepsilon_1^n, \\ \varepsilon_m^1 &= B_0\varepsilon_1^0 + B_1\varepsilon_1^1 + \cdots + B_n\varepsilon_1^n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_m^n &= L_0\varepsilon_1^0 + L_1\varepsilon_1^1 + \cdots + L_n\varepsilon_n^n; \end{aligned} \tag{1a}$$

und man hat

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_0 & L_1 & \cdots & L_n \end{vmatrix} = \delta^{2(m-1)}. \tag{2}$$

Um endlich die Integrale ε_1^i auszuwerthen, werden neue ganze Functionen $\Phi(z, \zeta)$ eingeführt, welche den Functionen $\Theta(z, \zeta)$ analog gebildet sind, insbesondere hinsichtlich ihrer Coefficienten ebenfalls die bei den Θ hervorgehobene Eigenschaft zeigen und wiederum der Bedingung

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \cdots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \cdots & \Phi(z_n, z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \cdots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix} = \delta^2$$

genügen. Aus ihnen setzen sich die durch folgende Gleichungen definirten Grössen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots \Lambda$ zusammen:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= A_0\Phi(Z, z_0) + A_1\Phi(Z, z_1) + \cdots + A_n\Phi(Z, z_n), \\ \mathsf{B} &= B_0\Phi(Z, z_0) + B_1\Phi(Z, z_1) + \cdots + B_n\Phi(Z, z_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Lambda &= L_0\Phi(Z, z_0) + L_1\Phi(Z, z_1) + \cdots + L_n\Phi(Z, z_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Bezeichnet man endlich mit $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0, \cdots \Lambda_0$ die Werthe dieser Constanten für den Fall, dass Z durch z_0 ersetzt wird, so hat man für die bestimmten Integrale ε_m^i schliesslich folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-Z}\mathsf{A}, \\ \varepsilon_m^1 &= e^{-z_0}\mathsf{B}_0 - e^{-Z}\mathsf{B}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_m^n &= e^{-z_0}\Lambda_0 - e^{-Z}\Lambda. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet Z irgend eine der Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$; setzen wir insbesondere $Z = z_k$, so mögen die dann entstehenden Werthe von $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots \Lambda$ mit $\mathsf{A}_k, \mathsf{B}_k, \cdots \Lambda_k$ bezeichnet werden, und es werde

$$\left[\varepsilon_m^i\right]_{Z=z_k} = \eta_k^i$$

gesetzt; dann ist auch

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\eta_k^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_k}\mathsf{A}_k,\\
\eta_k^1 &= e^{-z_0}\mathsf{B}_0 - e^{-z_k}\mathsf{B}_k,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\eta_k^n &= e^{-z_0}\Lambda_0 - e^{-z_k}\Lambda_k.
\end{aligned}
$$

Die Determinante der Coefficienten $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots$ ist hier gegeben durch

$$
(5)\qquad
\begin{vmatrix}
\mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 & \cdots & \mathsf{A}_n\\
\mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 & \cdots & \mathsf{B}_n\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\Lambda_0 & \Lambda_1 & \cdots & \Lambda_n
\end{vmatrix} = \delta^{2m}.
$$

§ 2.

Ueber die symmetrischen Functionen der Grössen e^{z_i}.

Wir bemerken, dass die in § 1. zusammengestellten Relationen unabhängig davon bestehen, ob die Grössen $z, z_0, z_1, \cdots, z_n$ reell oder complex sind, denn sie beruhen einfach auf identischen Umformungen; auch kann der bei Berechnung der Integrale η_k^i gewählte Integrationsweg ein beliebiger sein; es muss nur der unendlich ferne Punkt der z-Ebene ausgeschlossen bleiben.

Wir nehmen an, dass die symmetrischen Functionen der z_i reelle oder complexe ganze Zahlen seien; auch unter $N_0, N_1, \cdots, N_n$ verstehen wir reelle oder complexe ganze Zahlen. Zunächst werde ein System von Gleichungen abgeleitet, zu denen eine Relation der Form

$$
(6)\qquad N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0
$$

Veranlassung giebt.

Wir multipliciren die in (4) enthaltenen Gleichungen

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\eta_1^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_1}\mathsf{A}_1,\\
\eta_2^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_2}\mathsf{A}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\eta_n^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_n}\mathsf{A}_n,
\end{aligned}
$$

bez. mit $N_1 e^{z_1}, \cdots, N_n e^{z_n}$, dann ergiebt sich durch Addition

$$
\begin{aligned}
& e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n\\
&= e^{-z_0}\left(e^{z_1}N_1 + e^{z_2}N_2 + \cdots + e^{z_n}N_n\right)\mathsf{A}_0\\
&\quad - (\mathsf{A}_1 N_1 + \mathsf{A}_2 N_2 + \cdots + \mathsf{A}_n N_n).
\end{aligned}
$$

In Folge von (~~4~~ 6) muss daher die Gleichung bestehen

$$e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n = -(\mathsf{A}_0 N_0 + \mathsf{A}_1 N_1 + \cdots + \mathsf{A}_n N_n).$$

Analoge Gleichungen werden sich ergeben, wenn man A durch $\mathsf{B}, \cdots, \Lambda$ ersetzt; man wird also zu folgendem Systeme von $n+1$ Gleichungen geführt:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A}_0 N_0 + \mathsf{A}_1 N_1 + \cdots + \mathsf{A}_n N_n &= \alpha, \\ \mathsf{B}_0 N_0 + \mathsf{B}_1 N_1 + \cdots + \mathsf{B}_n N_n &= \beta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \Lambda_0 N_0 + \Lambda_1 N_1 + \cdots + \Lambda_n N_n &= \lambda, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} -\alpha &= e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n, \\ -\beta &= e^{z_1}\eta_1^1 N_1 + e^{z_2}\eta_2^1 N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^1 N_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -\lambda &= e^{z_1}\eta_1^n N_1 + e^{z_2}\eta_2^n N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^n N_n. \end{aligned}$$

Dies sind die Formeln, aus welchen Herr Hermite das Transscendentsein der Zahl e direct ableitet, indem er annimmt, dass die z_i selbst ganze Zahlen sind. Für unsern Zweck sollen die Gleichungen dadurch vereinfacht werden, dass $N_1 = N_2 = \cdots = N_n$ genommen wird; *es soll ferner im Folgenden immer $z_0 = 0$ gesetzt werden.* Man hat dann an Stelle von (8):

$$(9)\qquad \begin{aligned} N_0\mathsf{A}_0 + N_1(\mathsf{A}_1 + \cdots + \mathsf{A}_n) &= -N_1(e^{z_1}\eta_1^0 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0), \\ N_0\mathsf{B}_0 + N_1(\mathsf{B}_1 + \cdots + \mathsf{B}_n) &= -N_1(e^{z_1}\eta_1^1 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ N_0\Lambda_0 + N_1(\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n) &= -N_1(e^{z_1}\eta_1^n + \cdots + e^{z_n}\eta_n^n). \end{aligned}$$

Hier stehen links ganze Functionen der Grössen $z_1, z_2, \cdots, z_n$ mit ganzzahligen Coefficienten. Vertauscht man in ihnen z_i mit z_k, so vertauscht sich nach (7) auch A_i mit A_k. Die linke Seite der ersten Gleichung ist also eine symmetrische Function der Wurzeln z_i, *folglich selbst eine ganze Zahl.*

Durch Vertauschung von z_1 mit z_2 geht B_i in Γ_i über und umgekehrt, sobald i von 1 und 2 verschieden ist; dagegen vertauscht sich gleichzeitig B_1 mit Γ_2 und B_2 mit Γ_1: es vertauschen sich also die linken Seiten der zweiten und dritten Gleichung unter einander. Analoges gilt bei beliebigen Vertauschungen der z_i; also: *Die linken Seiten der n letzten Gleichungen des Systems* (9) *sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung von der Form*

$$(10)\qquad V^n + M_1 V^{n-1} + \cdots + M_n = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten M_i.

Wir lassen jetzt die Zahl m unendlich gross werden. Bezeichnet M' das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ für die Werthe von z, welche sich auf dem beim Integrale ε_m^i gewählten Integrationswege befinden, und ist l' die Länge dieses Weges, M_0' das Maximum des absoluten Betrages von $e^{-z}(z - z_i)^{-1}$ längs dieses Weges, so hat man

$$\text{abs}\, \varepsilon_m^i \leqq \frac{M'^{m} \cdot M_0' \cdot l'}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}.$$

Versteht man also unter M, M_0, l die grössten derjenigen Zahlen M', M_0', l', welche bei den verschiedenen Integralen ε_m^i vorkommen, wenn man die obere Grenze Z nach einander durch $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ersetzt und dem Index i alle möglichen Werthe beilegt, und setzt man noch $M_0 l = E$, so besteht für alle Integrale η_k^i die Ungleichung:

$$\text{abs}\, \eta_k^i \leqq \frac{M^m \cdot E}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)},$$

wo E und M bestimmte endliche von m unabhängige Zahlen bedeuten.

Es kann also die rechte Seite der ersten unter den Gleichungen (9) und somit die ganze Zahl $N_0 A_0 + N_1(A_1 + A_2 + \cdots A_n)$ beliebig klein gemacht werden, dadurch dass man m hinreichend gross wählt. Das ist aber nur möglich, wenn es eine endliche ganze Zahl m' giebt der Art, dass die Gleichung

$$N_0 A_0 + N_1(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 0$$

genau erfüllt ist für alle ganzzahligen Werthe von m, welche nicht kleiner als m' sind.

Ebenso ergiebt sich, dass die rechten Seiten der übrigen Gleichungen (9) gleich Null werden für $m = \infty$, dass also auch die linken Seiten, d. i. die Wurzeln von (10), beliebig klein werden für hinreichend grosse Werthe von m. Dasselbe gilt folglich von den Coefficienten M_i dieser Gleichung; da letztere aber ganze Zahlen sind, so müssen sie schon für hinreichend grosse *endliche* Werthe von m genau gleich Null sein; hieraus folgt, dass auch die Wurzeln von (10) für dieselben Werthe von m sämmtlich verschwinden. Wir sind also zu folgendem Resultate gekommen: *Soll eine Gleichung von der Form*

$$N_0 + N_1 \sum e^{z_i} = 0 \tag{11}$$

bestehen, so muss es eine bestimmte positive ganze Zahl m' geben der Art, dass für alle ganzzahligen Werthe von m, die nicht kleiner als m' sind, das folgende System von Gleichungen besteht:

$$\begin{aligned} A_0 N_0 + (A_1 + \cdots + A_n) N_1 &= 0, \\ B_0 N_0 + (B_1 + \cdots + B_n) N_1 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \Lambda_0 N_0 + (\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n) N_1 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Hieraus würde weiter folgen, dass die Determinante der Grössen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots, \Lambda$ verschwinde, da ihre aus zwei parallelen Reihen zu bildenden zweireihigen Unterdeterminanten sämmtlich Null sein müssten. Die Determinante ist aber nach (5) gleich δ^{2m}, kann also, da die z_i von einander verschieden vorausgesetzt wurden, niemals Null sein. Damit ist gezeigt, dass die Annahme einer Relation von der Form (11) zu einem Widerspruche führt, und wir haben den Satz gewonnen:

Sind $z_1, \cdots, z_n$ die von Null und von einander verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung von der Form

$$z^n + s_1 z^{n-1} + \cdots + s_n = 0, \tag{13}$$

wo die s_i reelle oder complexe ganze Zahlen bezeichnen, und ist die Discriminante dieser Gleichung von Null verschieden, so kann eine Relation von der Form (11) *nicht bestehen, falls die N_i reelle oder complexe ganze, von Null verschiedene Zahlen bedeuten.*

Ebensowenig ist eine Relation von der Form

$$N_0 + N_1 (e^{rz_1} + e^{rz_2} + \cdots + e^{rz_n}) = 0 \tag{14}$$

möglich, wenn r eine ganze Zahl bedeutet. Denn die Grössen rz_1, $rz_2, \cdots, rz_n$ sind ebenfalls von einander und von Null verschiedene Wurzeln einer Gleichung von der Form (13), sobald dies mit $z_1, z_2, \cdots z_n$ der Fall ist; es lassen sich also auf (14) dieselben Schlüsse wie auf (11) anwenden, und es folgt:

Unter den gemachten Voraussetzungen kann keine der symmetrischen Functionen

$$e^{rz_1} + e^{rz_2} + \cdots + e^{rz_n} \tag{15}$$

gleich einer rationalen Zahl sein.

Untersuchen wir weiter, ob zwischen diesen symmetrischen Functionen eine lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten N_i, also eine Gleichung von der Gestalt

$$0 = N_0 + N_1 \sum e^{z_i} + N_2 \sum e^{2z_i} + \cdots + N_s \sum e^{sz_i} \tag{16}$$

bestehen kann, wo s irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Die ns Grössen $z_i, 2z_i, \cdots sz_i$, mögen zur Abkürzung mit $z_1, z_2, \cdots z_{ns}$ bezeichnet werden, so dass $z_{i+n} = 2z_i$, $z_{i+2n} = 3z_i$, etc. Dieselben sind Wurzeln einer Gleichung ns^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten von der Form (13). Aus (16) würde sich also, wie aus (6), ein System von $ns+1$ Gleichungen von der Gestalt (8) ergeben. Um dieselben einfach schreiben zu können, führen wir statt der $(n+1)^2$ Grössen $\mathsf{A}_i, \mathsf{B}_i, \cdots \Lambda_i$ jetzt $(ns+1)^2$ Grössen A ein, die mit zwei Indices versehen sein mögen, und zwar so, dass der erste Index diejenige Unterscheidung bewirkt, welche früher durch Wahl der verschiedenen Buchstaben $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots \Lambda$ angedeutet war, dass also die folgenden zu (4) analogen Gleichungen bestehen (indem $z_0 = 0$):

$$\eta_k^i = \mathsf{A}_{i0} - e^{-z_k} \mathsf{A}_{ik}, \quad \text{für} \quad i, k \text{ gleich } 0, 1, 2, \cdots, ns.$$

Statt (8) haben wir dann:

$$
(17) \quad \begin{aligned}
&N_0 \mathsf{A}_{00} + N_1 \sum \mathsf{A}_{0,i} + N_2 \sum \mathsf{A}_{0,i+n} + \cdots + N_s \sum \mathsf{A}_{0,i+ns-n} = \alpha_0, \\
&N_0 \mathsf{A}_{10} + N_1 \sum \mathsf{A}_{1,i} + N_2 \sum \mathsf{A}_{1,i+n} + \cdots + N_s \sum \mathsf{A}_{1,i+ns-n} = \alpha_1, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&N_0 \mathsf{A}_{ns,0} + N_1 \sum \mathsf{A}_{ns,i} + N_2 \sum \mathsf{A}_{ns,i+n} + \cdots + N_s \sum \mathsf{A}_{ns,i+ns-n} = \alpha_{ns},
\end{aligned}
$$

wo die rechten Seiten gegeben sind durch

$$-\alpha_k = N_1 \sum \eta_i^{(k)} e^{z_i} + N_2 \sum \eta_{i+n}^{(k)} e^{z_{i+n}} + \cdots + N_s \eta_{i+ns-n}^{(k)} e^{z_{i+ns-n}}.$$

Alle hier vorkommenden Summen sind über i von $i = 1$ bis $i = n$ zu nehmen.

Auf den linken Seiten des Systems (17) stehen wieder ganze Functionen der z_i mit ganzzahligen Coefficienten. Vertauscht man z_i mit z_k (wo $i, k \leq n$), so vertauscht sich gleichzeitig z_{i+rn} mit z_{k+rn}, folglich auch

$$\mathsf{A}_{0,i} \text{ mit } \mathsf{A}_{0,k} \quad \text{und} \quad \mathsf{A}_{0,i+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{0,k+rn}$$

ferner, wenn der erste Index von Null verschieden ist:

$$\mathsf{A}_{k,i+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{l,i+rn} \quad \text{für} \quad l \gtrless k, i$$

$$\mathsf{A}_{i,k+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{k,i+rn} \quad \text{und} \quad \mathsf{A}_{i,i+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{k,k+rn}.$$

Die linke Seite der ersten unter den Gleichungen (17) ist sonach wieder eine ganze Zahl; die linken Seiten der übrigen Gleichungen sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade ns und von der Form (10). Auf alle vorkommenden ganzen Zahlen lassen sich für $m = \infty$ die bei (9) und (10) gemachten Schlüsse übertragen. Es folgt also, dass für hinreichend grosse *endliche* Werthe der ganzen Zahl m die linken Seiten der Gleichungen (17) genau gleich Null sein müssen. Daraus würde weiter folgen, dass für dieselben Werthe von m alle $(s + 1)$-reihigen Determinanten genau verschwinden, welche aus den $(s + 1)(ns + 1)$ Coefficienten der N_i in (17) in bekannter Weise zu bilden sind. Dann müsste auch die $(ns + 1)$-reihige Determinante der A_{ik} selbst gleich Null sein; diese aber ist nach (5) gleich der $2m^{\text{ten}}$ Potenz von δ, wenn man in der Determinante δ (vergl. § 1) $z_0 = 0$ macht und den Index n durch ns ersetzt.

Es ist δ gleich dem Producte aller Differenzen $\pm (pz_i - qz_k)$, welche entstehen, wenn man den Indices i, k alle Werthe $1, 2, \cdots n$, den Zahlen p, q alle Werthe $0, 1, 2, \cdots, s$ beilegt (ausgenommen

$p=q=0$). Es kann also δ nur Null sein, wenn zwischen zwei Wurzeln z_i, z_k eine Relation der Form $pz_i - qz_k = 0$ besteht. Nimmt man eine solche an, so würden die Gleichung (13) und die Gleichung

$$z^n + \frac{q}{p} s_1 z^{n-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 s_2 z^{n-2} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^n s_n = 0$$

eine gemeinsame Wurzel z_i zulassen, somit beide reducibel sein. Legen wir also der Gleichung (13) die Bedingung der Irreducibilität auf, so kann δ sicher nicht verschwinden, während wir eben sahen, dass in Folge von (16) und (17) $\delta = 0$ sein müsste. Folglich:

Sind $z_1, z_2, \cdots z_n$ die Wurzeln einer irreducibeln Gleichung von der Form (13) *mit ganzzahligen Coefficienten s_i, so kann zwischen den symmetrischen Functionen* (15) *keine lineare Gleichung mit rationalen, von Null verschiedenen Coefficienten bestehen.*

§ 3.

Anwendung auf Untersuchung der Zahl π.

Die gewonnenen Sätze lassen sich übertragen auf die symmetrischen Functionen

$$(18)\qquad \begin{array}{lll} \sum e^{z_1}, & \sum e^{z_1+z_2}, & \sum e^{z_1+z_2+z_3}, \ \ldots \\ \sum e^{r z_1}, & \sum e^{r(z_1+z_2)}, & \sum e^{r(z_1+z_2+z_3)}, \ldots \end{array}$$

wo wieder r eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Setzen wir zunächst voraus, dass die Zahlen, welche hier als Exponenten von e auftreten, sämmtlich von Null und von einander verschieden seien. Die Annahme einer linearen Beziehung mit rationalen Coefficienten N_i zwischen den Grössen (18) würde dann zu einem Gleichungssysteme führen, welches zu (17) ganz analog ist, und dessen Unmöglichkeit in ganz derselben Weise dargethan werden kann.

Ist die gemachte Voraussetzung nicht erfüllt, so nehmen wir zunächst an, dass in einer der Functionen (18), sagen wir Σe^Z, mehrere der Exponenten Z einander gleich seien, und betrachten eine Relation von der Gestalt

$$(19)\qquad 0 = N_0 + N_1 \sum e^Z.$$

Jetzt werden sich die sämmtlichen Grössen Z in mehrere Gruppen

$$Z_1,\ Z_1',\ Z_1'',\ \cdots;\quad Z_2,\ Z_2',\ Z_2'',\ \cdots;\ \cdots$$

zerlegen, der Art, dass die Grössen jeder Gruppe Wurzeln einer irreducibeln Gleichung mit rationalen Coefficienten sind und sich bei Vertauschungen der z_i nur unter einander vertauschen. Es war aber bei Behandlung der in § 2. supponirten Gleichungen (11), (14), (16) allein massgebend, dass in jeder einzelnen Summe nur solche Exponenten von e vorkamen, die sich unter einander vertauschen bei den Vertauschungen der z_i. Wir werden daher jetzt unmittelbar auf die Unmöglichkeit einer Relation von der Gestalt

$$0 = N_0 + N_1 \sum e^{Z_1} + N_2 \sum e^{Z_2} + \cdots$$

schliessen dürfen; und in dieser ist die Relation (19) als besonderer Fall enthalten.

Sollte ferner eine der Grössen Z gleich Null sein, so würde dies einer Aenderung des numerischen Werthes der Zahl N_0 äquivalent sein, das Resultat also nicht beeinflussen; es sei denn, dass alle auf der rechten Seite von (19) vorkommenden Exponenten gleichzeitig verschwänden. Wenn die z_i Wurzeln einer irreducibeln Gleichung sind, wird dies nur eintreten können für die Exponenten der Functionen

$$e^Z = e^{r(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)} \tag{20}$$

falls in (13) der Coefficient s_1 von z^{n-1} gleich Null ist. *Dieser Fall giebt im Folgenden immer eine Ausnahme* und soll nicht jedesmal wieder hervorgehoben werden.

Betrachtet man weiter eine lineare Relation, in der *mehrere* der Functionen (18) vorkommen, so wird man es beim Auftreten gleicher Exponenten wieder so einrichten, dass jede Zahl N_i multiplicirt erscheint in eine Summe, in deren Gliedern die Exponenten von e Wurzeln einer einzigen irreducibeln Gleichung sind, und die bei Gelegenheit von (19) gemachten Bemerkungen wiederholen. Als Specialfall erhält man dann wieder die zu Anfang dieses Paragraphen besprochene Relation, wo jede Zahl N_i in eine der symmetrischen Functionen (18) multiplicirt ist. — Schliesslich gelangen wir so zu folgenden Sätzen:

Es kann keine der symmetrischen Functionen (18) *gleich einer rationalen Zahl sein, ausgenommen eine Function* (20) *falls in* (13) s_1 *verschwindet.* Und allgemeiner: *Zwischen den Functionen* (18) *kann keine lineare Relation mit rationalen Coefficienten bestehen, ausgenommen den Fall, wo* s_1 *in* (13) *gleich Null ist, in welchem Falle eine solche Function der Grössen* (20) *gleich einer rationalen Zahl ist.*

Nun ist die erste Reihe der Grössen (18) identisch mit der Reihe der Coefficienten M_i derjenigen algebraischen Gleichung n^{ten} Grades

$$V^n - \mathsf{M}_1 V^{n-1} + \mathsf{M}_2 V^{n-2} - \cdots \pm \mathsf{M}_n = 0, \tag{21}$$

welche von den Zahlen e^{z_i} befriedigt wird. Wir wissen also, dass diese Coefficienten M_i nicht gleich rationalen Zahlen sind, ausgenommen M_n für $s_1 = 0$, und dass zwischen ihnen keine lineare Relation mit rationalen Coefficienten Statt hat. Eine solche aber würde nothwendig erfüllt sein müssen, wenn eine der Wurzeln von (21), d. i. der Grössen e^{z_i}, gleich einer rationalen Zahl wäre. Also:

Ist Z Wurzel einer irreducibeln algebraischen Gleichung von der Form (13), *so kann e^Z nicht gleich einer rationalen Zahl sein.*

Es ist aber die Bedingung $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$ erfüllt, also kann $\pi\sqrt{-1}$ nicht Wurzel einer irreducibeln Gleichung der Form (13) sein. Auf letztere Form kann jede Gleichung mit rationalen Coefficienten leicht gebracht werden, indem man pz statt z als Unbekannte auffasst, unter p eine passend gewählte ganze Zahl verstanden. Es folgt so der in der Einleitung hervorgehobene Satz:

Die Ludolph'sche Zahl π kann nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen (reellen oder complexen) Coefficienten sein.

§ 4.

Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate.

Im Vorstehenden sind alle Schlüsse nur so weit durchgeführt, als es nöthig oder nützlich schien, um zu dem zuletzt ausgesprochenen Satze zu gelangen. Dieselben sind aber sofort einer weiteren Verallgemeinerung fähig, welche dann eine bemerkenswerthe Anwendung auf die Untersuchung der natürlichen Logarithmen gestattet.

Es seien $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ irgend welche ganze Functionen der Grössen z_i mit ganzzahligen Coefficienten. Die von einander verschiedenen Werthe, welche Z_k durch Vertauschungen der z_i annimmt, mögen mit $Z_k', Z_k'', Z_k''', \cdots$ bezeichnet werden. Dieselben sind dann Wurzeln einer irreducibeln Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich Eins ist. Nach den zu Anfang von § 3. gemachten Erörterungen lassen sich auf die Grössen

$$\sum e^{Z_1}, \quad \sum e^{Z_2}, \cdots \tag{22}$$

wieder die analogen Schlüsse anwenden, wenn

$$\sum e^{Z_k} = e^{Z_k} + e^{Z_k'} + e^{Z_k''} + \cdots$$

gesetzt wird. *Es kann daher keine Relation von der Gestalt bestehen:*

$$0 = N_0 + N_1 \sum e^{Z_1} + N_2 \sum e^{Z_2} + \cdots. \tag{23}$$

Auf die Form der rechten Seite kann jede ganze Function der Grössen (22) sofort gebracht werden; also folgt als Corollar, dass *keine ganze Function der Grössen* (22), *insbesondere der Grössen* M_i *in* (21), *welche rationale Coefficienten hat, verschwinden kann.*

Uns kommt es mehr auf andere Folgerungen an. Es ergiebt sich nämlich, dass *die als unmöglich nachgewiesenen Relationen auch noch unmöglich sind, wenn man unter den N_i beliebige algebraische Irrationalzahlen versteht.* In der That, schreiben wir (23) in der Form

$$N_0 - V = 0,$$

und bezeichnen wir mit N_0', N_0'', $\cdots$, V', V'' $\cdots$ die Grössen, welche aus N_0 bez. V entstehen, falls man die N_i mit allen Grössen vertauscht, die mit den N_i zusammen Wurzeln algebraischer Gleichungen mit rationalen Coefficienten sind, so würde auch die Gleichung

$$(N_0 - V)(N_0' - V')(N_0'' - V'') \cdots = 0$$

erfüllt sein müssen, wo links eine ganze Function der Zahlen (22) mit *rationalen* Coefficienten steht, also gerade wieder ein Ausdruck wie (23), von dem wir wissen, dass er nicht verschwinden kann. Insbesondere ergiebt sich: *Es kann keine ganze Function der M_i mit algebraisch irrationalen Coefficienten verschwinden*, ausgenommen (im Falle $\Sigma z_1 = 0$) eine solche Function von M_n allein.

Eine derartige Relation aber würde nach (21) erfüllt sein, wenn e^{z_i} eine algebraisch irrationale Zahl wäre. Hebt man noch, wie am Schlusse von § 3., die der Gleichung (13) zunächst auferlegte Beschränkung auf, so folgt also:

Ist z eine rationale Zahl ($\gtrless 0$) oder algebraisch irrational, so ist e^z eine transscendente Zahl.

Und durch Umkehrung:

Der natürliche Logarithmus einer rationalen Zahl (die Einheit ausgenommen) oder einer algebraisch irrationalen Zahl ist stets eine transscendente Zahl.

Auch hier haben wir die Ueberlegungen specieller gefasst als nöthig wäre, da wir zunächst die ausgesprochenen speciellen Sätze im Auge hatten. Man kann indessen Alles (mit Rücksicht auf die Erörterungen zu Anfang von § 3.) in folgendem allgemeinen Theoreme zusammenfassen:

Ist eine Reihe algebraischer, von einander verschiedener Gleichungen von der Form (13) $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\cdots$, $f_s = 0$ mit beliebigen ganzzahligen Coefficienten gegeben, sind dieselben sämmtlich irreducibel, und bezeichnet man mit Z_i, Z_i', Z_i'', $\cdots$ die Wurzeln der Gleichung $f_i = 0$, mit N_k beliebige rationale oder algebraisch irrationale Zahlen (die nicht sämmtlich gleich Null sind), so kann eine Gleichung der Form

$$(24) \qquad N_0 + N_1 \sum e^{Z_1} + N_2 \sum e^{Z_2} + \cdots + N_s \sum e^{Z_s} = 0$$

nicht bestehen; es sei denn, dass eine der ganzen Functionen f_i einfach *mit z identisch ist, etwa $f_1 = z$, in welchem Falle die Gleichung* (24) *möglich wird für $N_2 = N_3 = \cdots = N_s = 0$, $N_1 = -N_0$.*

Dieser Satz wiederum führt zu folgendem Resultate:

Versteht man unter den z_i beliebige rationale oder algebraisch irrationale, von einander verschiedene Zahlen, und unter den N_i ebensolche Zahlen, die nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann keine Gleichung der Form bestehen:

$$0 = N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} + \cdots + N_r e^{z_r}.$$

Bildet man nämlich das Product aller Ausdrücke, welche aus der rechten Seite dadurch entstehen, dass man die N_i auf alle Weisen unter einander vertauscht, die z_i aber mit denjenigen Grössen vertauscht, die mit ihnen zusammen Wurzeln irreducibler Gleichungen sind, so ist dieses Product eben ein Ausdruck, wie er auf der rechten Seite von (23) bez. (24) erscheint; es kann also keiner seiner Factoren verschwinden. An der paarweisen Verschiedenheit der z_i, die beim Beweise vorausgesetzt wird, muss festgehalten werden; denn wäre z. B. $z_1 = z_2$, so wäre die Relation

$$N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} = 0$$

erfüllt, sobald $N_1 = -N_2$.

Eine genauere Darlegung der hier nur angedeuteten Beweise behalte ich mir für eine spätere Veröffentlichung vor.

Freiburg i. Br., April und Juni 1882.

Anmerkung. Litteraturnachweise über die Zahl π findet man auch in Baltzer's Elementen der Mathematik (Arithmetik, § 31., Planimetrie, § 13.). Den älteren Beweisen für die Irrationalität von π^2 hat Herr Hermite einen neuen hinzugefügt: Borchardt's Journal, Bd. 76, p. 342, 1873.

mit z identisch ist, etwa $f_1 = z$, in welchem Falle die Gleichung (24) *möglich wird für $N_2 = N_3 = \cdots = N_s = 0$, $N_1 = -N_0$.*

Dieser Satz wiederum führt zu folgendem Resultate:

Versteht man unter den z_i beliebige rationale oder algebraisch irrationale, von einander verschiedene Zahlen, und unter den N_i ebensolche Zahlen, die nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann keine Gleichung der Form bestehen:

$$0 = N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} + \cdots + N_r e^{z_r}.$$

Bildet man nämlich das Product aller Ausdrücke, welche aus der rechten Seite dadurch entstehen, dass man die N_i auf alle Weisen unter einander vertauscht, die z_i aber mit denjenigen Grössen vertauscht, die mit ihnen zusammen Wurzeln irreducibler Gleichungen sind, so ist dieses Product eben ein Ausdruck, wie er auf der rechten Seite von (23) bez. (24) erscheint; es kann also keiner seiner Factoren verschwinden. An der paarweisen Verschiedenheit der z_i, die beim Beweise vorausgesetzt wird, muss festgehalten werden; denn wäre z. B. $z_1 = z_2$, so wäre die Relation

$$N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} = 0$$

erfüllt, sobald $N_1 = -N_2$.

Eine genauere Darlegung der hier nur angedeuteten Beweise behalte ich mir für eine spätere Veröffentlichung vor.

Freiburg i. Br., April und Juni 1882.

Anmerkung. Litteraturnachweise über die Zahl π findet man auch in Baltzer's Elementen der Mathematik (Arithmetik, § 31., Planimetrie, § 13.). Den älteren Beweisen für die Irrationalität von π^2 hat Herr Hermite einen neuen hinzugefügt: Borchardt's Journal, Bd. 76, p. 342, 1873.